Groupe A

ÉPREUVE PRATIQUE
DE MATHÉMATIQUES

Soit $H = \mathbf{R}^p$ muni du produit scalaire euclidien (,) et de la norme associée $\| \ \|$. On désigne par I l'application identique de H. Soit L une application de H dans H; on pose $L^0 = I$, puis on définit par récurrence, pour $n \geqslant 1$, L^n par la formule $L^n = L \circ L^{n-1}$; le plus souvent l'image d'un élément u de H par L sera notée Lu.

Dans tout le problème, on désigne par T une application de H dans H vérifiant :

(1) $\quad \forall\, u \in H, \quad \forall\, v \in H, \quad \| Tu - Tv \| \leqslant \| u - v \|$.

On désigne par F l'ensemble des points fixes de T,

$$\text{i.e. } F = \{ u \in H ; \ Tu = u \}$$

et on suppose F non vide. On se propose d'étudier divers procédés itératifs pour construire des éléments de F.

I

Soit C un sous-ensemble de H, non vide, fermé et convexe (i.e. $\forall\, u \in C$, $\forall\, v \in C$ et $\forall\, t \in [0, 1]$, on a $(1 - t)u + tv \in C$).

1° Vérifier rapidement que pour tout $u \in H$, il existe $v \in C$ unique (noté Pu) tel que :

(2) $\quad \| u - v \| = \inf \{ \| u - w \| ; \ w \in C \}$

(penser à utiliser l'égalité du parallélogramme

$$\| a + b \|^2 + \| a - b \|^2 = 2 \| a \|^2 + 2 \| b \|^2).$$

2° Montrer que l'on a :

(3) $\quad \forall\, u \in H, \quad \forall\, z \in C, \quad (u - Pu, z - Pu) \leqslant 0$;

(écrire $\| u - Pu \|^2 \leqslant \| u - w \|^2$ avec $w = (1 - t)Pu + tz$ et $t \in]0, 1]$, puis faire tendre t vers zéro).

3° Montrer que $\forall\, u \in H, \quad \forall\, v \in H, \quad \forall\, (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$

avec $\qquad \alpha \geqslant 0, \quad \beta \geqslant 0 \quad$ et $\quad \alpha + \beta = 1$,

on a :

(4) $\| T(\alpha u + \beta v) - \alpha T(u) - \beta T(v) \|^2 \leqslant \alpha\beta(\| u - v \|^2 - \| Tu - Tv \|^2)$

(on pourra utiliser l'égalité :

$$\alpha\beta \| a - b \|^2 + \| \alpha a + \beta b \|^2 = \alpha \| a \|^2 + \beta \| b \|^2).$$

4° Prouver que F est fermé et convexe.

II

On pose $S = \frac{1}{2}(I + T)$; noter que S et T ont les mêmes points fixes.

1° Vérifier que l'on a :

(5) $\quad \forall\, u \in H, \quad \forall\, v \in H, \quad (Su - Sv, u - v) \geqslant \| Su - Sv \|^2$

et

(6) $\quad \| Su - Sv \|^2 + \| (Su - Sv) - (u - v) \|^2 \leqslant \| u - v \|^2$.

2° Soit $l \in F$; montrer que l'on a :

(7) $\quad \forall\, x \in H, \quad \forall\, n \in \mathbf{N},$

$$\| S^{n+1}x - S^n x \|^2 \leqslant \| S^n x - l \|^2 - \| S^{n+1}x - l \|^2.$$

3° En déduire que la suite $\| S^n x - l \|$ est décroissante et que

$$\lim_{n \to \infty} \| S^{n+1}x - S^n x \| = 0.$$

4° Conclure que la suite $(S^n x)_{n \geqslant 0}$ converge lorsque $n \to \infty$ vers un élément de F. (On pourra d'abord remarquer que toute sous-suite convergente extraite de $(S^n x)_{n \geqslant 0}$ converge vers un point fixe de S).

Pour les questions II. 5° et II. 6° on suppose de plus que T est linéaire.

E.N.S. ULM & SEVRES

1976

5° Montrer que le noyau Ker (I − S) et l'image Im (I − S) de I − S sont orthogonaux; en déduire que $H = \mathrm{Ker}\,(I - S) \oplus \mathrm{Im}\,(I - S)$; (on pourra commencer par vérifier que si $u \in \mathrm{Ker}\,(I - S)$, on a, pour tout $v \in H$, $(v - Sv, v - u) \geqslant 0$).

6° Soit $x \in H$; on pose $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \mathrm{Ker}\,(I - S)$ et $x_2 \in \mathrm{Im}\,(I - S)$.

Montrer que $\lim_{n \to \infty} S^n x = x_1$.

III

Dans cette partie on fixe $x \in H$ et l'on pose, pour n entier $\geqslant 1$,

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^i x .$$

1° Montrer que les suites $(\sigma_n)_{n \geqslant 1}$ et $(T\sigma_n)_{n \geqslant 1}$ sont bornées.

2° Vérifier que, pour tout couple $(n, i) \in \mathbf{N}^2$ tel que $1 \leqslant i \leqslant n - 1$, on a :

(8) $\|T\sigma_n\|^2 - 2(T\sigma_n, T^i x) \leqslant -\|T^i x\|^2 + \|T^{i-1}x\|^2 + \|\sigma_n\|^2 - 2(\sigma_n, T^{i-1}x)$

et que :

(9) $(n-1)\,\|T\sigma_n\|^2 - 2(T\sigma_n, n\sigma_n - x) \leqslant -\|T^{n-1}x\|^2 + \|x\|^2 + (n-1)\,\|\sigma_n\|^2 - 2(\sigma_n, n\sigma_n - T^{n-1}x)$.

3° En déduire que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\|\sigma_n - T\sigma_n\|^2 \leqslant \frac{1}{n}\,\|x - T\sigma_n\|^2 .$$

On considère l'application P définie en I. 1°, relativement à C = F (ce qui est licite d'après I. 4°).

4° Montrer que, pour tout couple $(k, n) \in \mathbf{N}^2$ vérifiant $k \geqslant n$, on a :

(10) $\|P(T^n x) - P(T^k x)\|^2 \leqslant 2\|T^n x - P(T^n x)\|^2 - 2\|T^k x - P(T^k x)\|^2$

(on pourra appliquer l'égalité du parallélogramme citée au I. 1° avec $a = T^k x - P(T^k x)$ et $b = T^k x - P(T^n x)$).

5° En déduire que $(P(T^n x))_{n \geqslant 0}$ est une suite de Cauchy. Soit $l = \lim_{n \to \infty} P(T^n x)$ avec $l \in F$.

6° Déduire de (3) et (10) que l'on a :

(11) $\forall\, z \in F,\ \forall\, n \in \mathbf{N},\ (T^n x - P(T^n x), z - l) \leqslant M\|l - P(T^n x)\|$,

où $M = \|x - Px\|$,

puis :

(12) $\forall z \in F,\ \forall n \geqslant 1,\ (\sigma_n - \xi_n, z - l) \leqslant \frac{M}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \|l - P(T^i x)\|$

où $\xi_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} P(T^i x)$.

7° Montrer que $\lim_{n \to \infty} \sigma_n = l$.

8° Que peut-on dire de la suite :

$$\omega_n = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=0}^{n-1} i\, T^i x \ ?$$

Généraliser.

9° En s'inspirant de II. 5° et II. 6° étudier $\lim_{n \to \infty} \sigma_n$ quand T est linéaire.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail